MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CARAŞ-SEVERIN
Strada Ateneului 320112, Nr. 1, Reşiţa, Caraş-Severin, ROMÂNIA
Tel: 0255-214238; Fax: 0255-216042
E-mail: isjcaras@cs.ro; Web: http://www.cs.isj.edu.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2010 – FAZA LOCALĂ
13.02 2010

CLASA A XII-A
PROFIL M1

1. Se consideră mulțimea $G=\left\{f_n:(2,\infty)\to(2,\infty)/\, f_n(x)=2+(x-2)^{2^n},\, n\in\mathbb{Z}\right\}$.Să se arate că, in raport cu operația de compunere a funcțiilor, G are o structură de grup abelian, izomorf cu $(\mathbb{Z},+)$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă care satisface egalitatea $\left(f'(x)\right)^2=\left(f(x)\right)^2+4$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

a) Demonstrați că f este strict monotonă;

b) Determinați funcția f în cazul în care este strict crescătoare şi $f(0)=-\frac{3}{2}$.

RMT 1/2009

3. Fie $(G,\cdot)$ un grup şi H o submulțime a lui G, nevidă şi diferită de G, cu proprietatea : $\forall x\in H, \forall y\in G\setminus H \Rightarrow xy\in G\setminus H$. Să se arate că H este un subgrup al lui G.

Gazeta Matematică

4. Se consideră mulțimea $D=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ şi funcția $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x\cdot\cos 3x$.

a. Arătați că există $a,b\in D\setminus\left\{0,\frac{\pi}{2}\right\}$ pentru care $f(a)\in\mathbb{Q}$ şi $f(b)\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

b. Demonstrați că dacă F este o primitivă a funcției f pentru care $F(0)\in\mathbb{Q}$, atunci $F(\frac{\pi}{2})\in\mathbb{Q}$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore
Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.